الرياضيات للصف الثاني عشر

الفرع العلمي والصناعي

عنوان الدرس:

نظريتا رول والقيمة المتوسطة

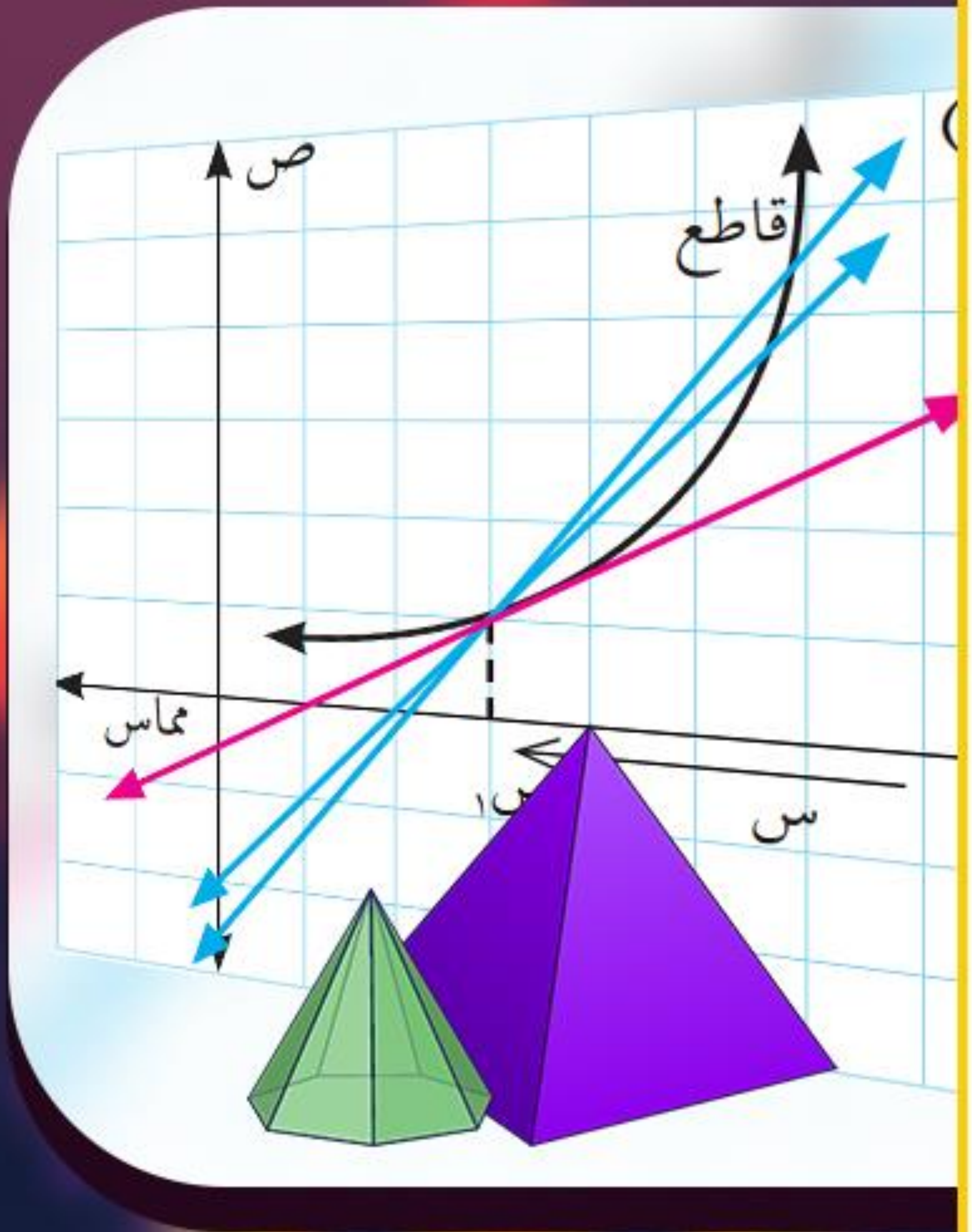
إعداد وتقديم:

أ. آسية حسن عطاالله

إشراف:

د. رحمة محمد عودة

2019-2018



وزارة التربية والتعليم العالي

إذاعة صوت التربية والتعليم

الإدارة العامة للإشراف والتأهيل التربوي

بوابة روافد التعليمية

أهداف الدرس

بعد الانتهاء من الدرس يُتوقع لأن تكون قادراً على أن:

- تبحث تحقق شروط نظرية رول

تجد قيمة جـ التي تحقق شروط نظرية رول

- تبحث تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة

تجد قيمة جـ التي تحقق.

- حل تمارين على نظريتي رول والقيمة المتوسطة.

نظرية رول

نظرية رول

النظرية:

إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [أ ، ب]، وقابلاً للاشتقاق في]أ ، ب[، وكان ق(أ) = ق(ب) فإنه يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∈]أ ، ب[بحيث قَ(جـ) = ٠

نظرية رول

شروط النظرية:

١. اذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [أ،ب]

٢. وكانت ق َ(س) موجودة في الفترة]أ،ب[

٣. ق(أ)=ق(ب)

النتيجة:

يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∈]أ،ب[بحيث ق َ(جـ) = ٠

مثال: بيّن أن الاقتران ق(س) = $س^٢$ − س − ٦ يحقق شروط نظرية رول في الفترة [٠ ، ١]. ثم جد قيمة، أو قيم جـ التي تعينها النظرية.

الحل: ١ نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الإقتران ق(س) في الفترة [٠ ، ١]

ق(س) متصل في الفترة [٠ ، ١] لأنه كثير حدود

وقابل للاشتقاق في الفترة]٠ ، ١[لأنه كثير حدود

ق(٠) = ⁻٦ ، ق(١) = ⁻٦ ومنها ق(٠) = ق(١)

تحققت شروط نظرية رول

إذن يوجد على الأقل جـ ∈]٠ ، ١[بحيث قَ(جـ) = ٠

تابع حل المثال:

نجد قيمة/ قيم جـ التي تعينها النظرية:

$$ق'(س) = ٢س - ١$$

ومنها $ق'(جـ) = ٢جـ - ١ = ٠$

$$جـ = \frac{١}{٢} \in]٠ ، ١[$$

مثال:

إذا علمت أن الاقتران ق(س) = جتا٢س + ٢جاس يحقق شروط نظرية رول في الفترة [أ ، π]

حيث أ > ٠ ، فما قيمة/ قيم الثابت أ ؟

الحل:

بما أن الاقتران ق(س) يحقق شروط نظرية رول في الفترة [أ ، π]

فإن ق(أ) = ق(π)

ومنها $\pi\square 2+\pi 2\square = h\square 2 + h 2\square$

$0\times 2+1 = h\square 2 + h 2\square$

$1 = h\square 2 + h 2\square$

$1 = h\square\square + (1 + h^{2}\square 2 -)$

تابع حل المثال:

$$1 = h\square\ \square + (1 + h^2\ \square 2 -)$$

$$0 = h\square\ \square + h^2\ \square 2 -$$

$$0 = (1 - h\square)\, h\square 2$$

ومنها $0 = h\square$ فتكون $\pi\ 0 = h$

مرفوضة

أو $0 = 1 - h\square$ ومنها $1 = h\square$

فتكون $\frac{\pi}{2} = h$

مثال: ابحث في تحقق شروط نظرية رول على الاقتران ق(س) = $\begin{cases} \text{س} - ٢ & ، \ ^{-}٤ \le \text{س} < \ ^{-}١ \\ \text{س}^{٢} - ٧ & ، \ ^{-}١ \le \text{س} \le ١ \end{cases}$

في الفترة [⁻٤ ، ١] ثم جد قيمة/ قيم جـ التي تحددها النظرية (إن وجدت).

الحل: نبحث في تحقق شروط نظرية رول على الإقتران ق(س) في الفترة [⁻٤ ، ١]

١ ق(س) متصل في [⁻٤ ، ⁻١[لأنه كثير حدود

ق(س) متصل في]⁻١ ، ١] لأنه كثير حدود   لكن ق(س) غير متصل عند س = ⁻١

لأن $\underset{s\to -1^{-}}{\square}(s-2) \neq \underset{s\to -1^{+}}{\square}(s^{2}-7)$

ومنها فإن ق(س) غير متصل على [⁻٤ ، ١]

تابع حل مثال:

٢ $$ق'(س) = \begin{cases} ١ ، & ^-٤ < س < ^-١ \\ ٢س ، & ^-١ < س < ١ \end{cases}$$

ق'($^-$١) غير موجودة **لأن ق(س) غير متصل عند س = – 1**

إذن ق(س) غير قابل للاشتقاق على]$^-$٤ ، ١[

لم تتحقق شروط نظرية رول على [$^-$٤ ، ١]

تابع حل المثال:

$$ق'(س) = \begin{cases} ١ & ، \ -٤ < س < -١ \\ ٢س & ، \ -١ < س < ١ \end{cases}$$

لم تتحقق شروط نظرية رول على [−٤ ، ١] ، وهذا لا يعني بالضرورة عدم وجود قيم لـ جـ ، وللبحث عن قيم جـ بحيث ق'(جـ) = ٠ فإنه:

عندما −٤ < س < −١

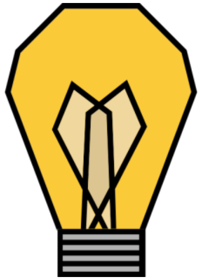
تكون ق'(س) ≠ ٠

لا يوجد جـ في هذه الفترة

عندما −١ < س < ١

فإن ٢جـ = ٠

أي أن جـ = ٠ ∈]−١ ، ١[



هل إيجاد قيمة / قيم لـ جـ مع عدم تحقق نظرية رول يتعارض مع النظرية؟

طبعا لا يتعارض لأن تحقق رول يجزم بوجود جـ واحدة على الأقل ولكن عدم تحقق نظرية رول لا يعني بالضرورة عدم وجود قيمة/ قيم ل جـ.

نظرية القيمة المتوسطة

نظرية القيمة المتوسطة

إذا كان ق(س) اقترانا متصلاً في [أ ، ب] وقابلاً للاشتقاق في]أ ، ب[

فإنه يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∈]أ ، ب[بحيث أن ق̀(جـ) = $\frac{\text{ق(ب)} - \text{ق(أ)}}{\text{ب} - \text{أ}}$

نظرية القيمة المتوسطة

شروط النظرية:

١. اذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً في الفترة [أ،ب]

٢. وكانت ق َ(س) موجودة في الفترة]أ،ب[

النتيجة:

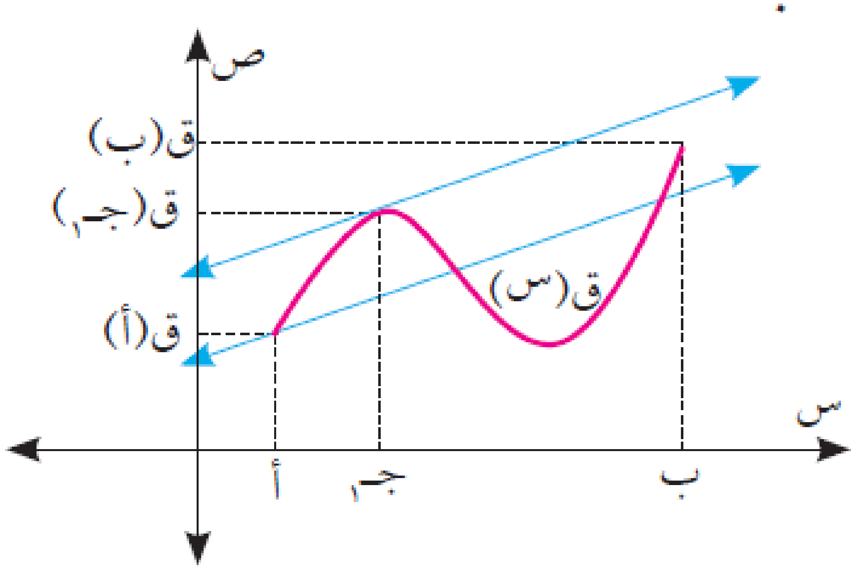
يوجد عدد حقيقي واحد على الأقل جـ ∈]أ،ب[بحيث $ق\,َ(جـ) = \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$

الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [أ ، ب] .

هل ق(س) متصل في [أ ، ب]، وقابل للاشتقاق في]أ ، ب[؟

ما ميل القاطع الواصل بين النقطتين (أ ، ق(أ)) ، (ب ، ق(ب))؟

هل ميل مماس المنحنى عند س = $جـ_1$ يساوي ميل القاطع؟



مثال: بيّن أن الاقتران ق(س) = $س^٣$ + ١ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [⁻٢ ، ١] ثم جد قيمة/ قيم جـ التي تحددها النظرية.

الحل: نبحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) في [⁻٢ ، ١]

الاقتران ق(س) متصل في الفترة [⁻٢ ، ١] لأنه كثير حدود

وقابل للاشتقاق في الفترة]⁻٢ ، ١[لأنه كثير حدود

إذن تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) في [⁻٢ ، ١]

يوجد على الأقل جـ ∈]⁻٢ ، ١[

بحيث قَ(جـ) = $\frac{ق(١) - ق(⁻٢)}{١ - (⁻٢)}$

ومنها ٣$جـ^٢$ = $\frac{٢ - (⁻٧)}{٣}$

أي أن جـ = ± ١

ومنها جـ = ⁻١ ∈]⁻٢ ، ١[

جـ = 1 مرفوضة

مثال: ابحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة للاقتران ق(س) = [٢س + ١] في الفترة [٠ ، ١]، ثم جد قيمة/ قيم جـ التي تعينها النظرية (إن وجدت).

الحل: نعيد تعريف قاعدة الاقتران اكبر عدد صحيح فيصبح:

$$ق(س) = \begin{cases} ١ & ، \quad ٠ \leq س < \frac{١}{٢} \\ ٢ & ، \quad \frac{١}{٢} \leq س < ١ \\ ٣ & ، \quad س = ١ \end{cases}$$

ومنها $$قَ(س) = \begin{cases} ٠ & ، \quad ٠ < س < \frac{١}{٢} \\ ٠ & ، \quad \frac{١}{٢} < س < ١ \end{cases}$$

نبحث في تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الاقتران ق(س) في [٠ ، ١]

ق(س) غير متصل في [٠ ، ١]

ق(س) غير قابل للاشتقاق في]٠ ، ١[

لم تتحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على ق(س) في [٠ ، ١]

وهذا لا يعني عدم وجود قيم لـ جـ

حل تمارين على نظريتي رول والقيمة المتوسطة

مثال: إذا علمت أن الاقتران ق(س) = $\frac{(س^{٢} - ٥س + ٦)(س + أ)}{س - ٣}$ ، س ∋ [−١ ، ب] يحقق شروط نظرية رول في [−١ ، ب]، وكانت قيمة جـ التي تعينها النظرية هي جـ = ٠ ، فجد الثابتين أ ، ب

الحل: بما أن الاقتران ق(س) يحقق شروط نظرية رول في الفترة [−١ ، ب] فإن:

ق(س) متصل في [−١ ، ب]   س ≠ ٣

ق(س) = $\frac{(h+s)(2-s)(3-s)}{(3-s)}$

ق(س) = $(h+s)(2-s)$

ق(س) = $b2 - s\,2 - s\,h + {}^{2}s$ س ≠ ٣

ولأن الاقتران يحقق شروط رول

ق(ب) = ق(−١)

$b2 - f\,h + f\,2 - {}^{2}f = (f)r$

ق(−١) = ١ − أ + ٢ − ٢أ = ٣ − ٣أ

$b3 - 3 = b2 - f\,h + f\,2 - {}^{2}f$

$h - 3 = f\,h + f\,2 - {}^{2}f$ المعادلة (١)

تابع حل المثال:

ق(س) $= s^2 + hs - 2s - 2h$

المعادلة (1)

ب٢ − ٢ب + أب = ٣ − أ

لكن قَ(س) = ٢س + أ − ٢ ، س ∈]−١ ، ب[

وبما أن جـ = ٠ فإن قَ(٠) = ٠

$0 = 2\times 0 + h - 2$ منها أ = ٢

بتعويض قيمة أ = ٢ في المعادلة (١)

$f^2 - 2f + 2f = 3 - 2 \leftarrow f^2 = 1$

$f = \pm 1$

ب=−1 مرفوضة

نحصل على أن قيمة ب = ١

مثال: إذا علمت أن الاقتران ق(س) = $\begin{cases} \text{أس + ب} & \text{،} \quad {}^{-}3 \leq \text{س} \leq {}^{-}1 \\ {}^{-}\text{س}^{2} & \text{،} \quad {}^{-}1 < \text{س} \leq 5 \end{cases}$ ، يحقق شروط

نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [$^{-}3$ ، ٥] ، جد الثابتين أ ، ب.

الحل: بما أن ق(س) يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [$^{-}3$ ، ٥] فإن:

ق(س) متصل على [$^{-}3$ ، ٥]

ومنه ق(س) متصل عند س = $^{-}1$

أي أن: $^{-}$أ + ب = $^{-}1$ المعادلة (١)

كما أن: ق(س) قابل للاشتقاق في]$^{-}3$ ، ٥[

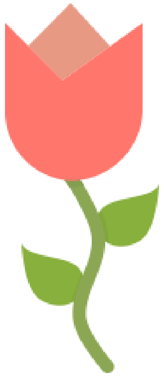
ق$'$(س) = $\begin{cases} \text{أ} & \text{،} \quad {}^{-}3 < \text{س} \leq {}^{-}1 \\ {}^{-}2\text{س} & \text{،} \quad {}^{-}1 < \text{س} < 5 \end{cases}$ ، أ ، ب $\in$ ح

وتكون ق$'$($^{-}1$)$^{+}$ = ق$'$($^{-}1$)$^{-}$

وينتج أن: أ = ٢

بتعويض قيمة أ = ٢ في المعادلة (١)

ينتج أن ب = ١



نشكر لك حسن متابعتك

أسئلة الدرس الأول: نظريتا رول والقيمة المتوسطة:(الإجابات الصحيحة محددة باللون الأصفر)

- **الهدف الأول: البحث في تحقق شروط نظرية رول للاقتران وإيجاد قيمة جـ.**

١. قيمة جـ التي تحددها نظرية رول للاقتران $r(s) = e\,s + f\,s$ في الفترة $\left[@ , \frac{\pi}{2}\right]$ هي

أ. صفر   ب. $\frac{\pi}{6}$ جـ. $\frac{\pi}{3}$ **د.** $\frac{\pi}{4}$

٢. اذا كان $r(s)$ يحقق شروط رول على الفترة $[@ , f]$ فان العبارة الصحيحة دائما هي:

أ. يوجد جـ على الأقل $\in [@ , F]$ بحيث أن $r([\ ]) = ٠$

ب. $r(H) \times r(f) \succ 0$

جـ. يوجد جـ على الأقل $\in [@ , F]$ بحيث يكون المماس عندها افقياً

د. $r(s)$ يحقق شروط رول على أي فترة جزئية من الفترة $[@ , f]$

- **الهدف الثاني: البحث في تحقيق شروط نظرية القيمة المتوسطة للاقتران وإيجاد قيمة جـ.**

١. قيمة جـ التي تحددها نظرية القيمة المتوسطة للاقتران
$r(s) = s^{2} + s - 6$ في الفترة [−@2] هي:

أ. $\frac{3}{2}$ ب. $\frac{5}{2}$ جـ. $\frac{-1}{2}$ د. $\frac{1}{2}$

٢. اذا كان ق(س) اقتران خطي ميله يساوي ٢ يحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة معرف على الفترة [@2] فان قيمة جـ التي تعينها النظرية هي

أ. ٢ ب. [@2] جـ.]@2[د. {@2}

- **الهدف الثالث: حل تمارين على نظريتا رول والقيمة المتوسطة.**

١. اذا كان ق(س)= س^{٢} -٤س+٥ و كان ق(س) يحقق شروط نظرية رول في $[2+\text{I}@]$ فان I تساوي

أ. صفر ب. ١ جـ. ٢ د. ٣

٢. جميع الاقترانات التالية تحقق نظرية القيمة المتوسطة في $[2@-]$ عدا واحدة هي

أ. ق(س)= جتاس ب. ق(س)=س^{٣} جـ. ق(س)= $\frac{s^{2}}{s-2}$

د. $\frac{s}{s^{2}+s+1}$